# ارائه‌ی تابع اغتشاش ترک جدید برای آنالیز ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار*

موسی رضائی[۱] سعید لطفان[۲] وحید عرب‌ملکی[۳]

**چکیده** در این مقاله، مدل پیوسته‌ی جدید و کامل‌تری از ناحیه‌ی ترک برای مطالعه و آنالیز ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار اویلر- برنولی ارائه شده است. به این منظور، ترک به‌صورت یک اغتشاش پیوسته در میدان تنش و کرنش مدل شده که با کمک اصول مکانیک شکست به‌صورت تابع اغتشاش ترک ارائه شده است. در ادامه با کمک این تابع و به‌کارگیری اصل همیلتون معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار با ترک لبه باز به‌دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با استفاده از حل معادله‌ی حرکت به‌روش گالرکین، استخراج شده است. سپس برای در نظر گرفتن اثر باز و بسته شوندگی ترک، سفتی تیر در محل ترک به‌صورت دوخطی مدل شده است. یکی از ویژگی‌های این روش، قابلیت اعمال آن به تیرهای ترک‌دار در تمامی شکل مودهای ارتعاشی می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که کاهش فرکانس‌های طبیعی برای ترک باز و بسته شونده کم‌تر از ترک باز می‌باشد. در پایان نتایج به‌دست آمده با نتایج تجربی موجود در مقاله‌های پیشین مقایسه شده است، این نتایج نشان می‌دهد که مدل ارائه شده نسبت به مدل‌های قبلی، بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را به‌ازای پارامترهای مختلف ترک با دقت بهتری پیش‌بینی می‌نماید.

**واژه‌های کلیدی** آنالیز ارتعاشی، تیر ترک‌دار، اصل همیلتون، تابع اغتشاش، مدل سفتی دوخطی.

# Introducing a New Crack Disturbance Function for Transverse Vibration Analysis of a Cracked Beam

M. Rezaee S. Lotfan V. A. Maleki

**Abstract** *In this paper, in order to analyze the transverse vibration of a uniform Bernoulli-Euler beam containing one single edge crack, a new continuous model is proposed for the cracked section. To this end, by using the fracture mechanics, the crack is modeled as a continuous disturbance in the stress and strain fields. By applying the Hamilton's principle, the equation of motion and the corresponding boundary conditions of the system are derived. The resulting equation is solved by the Galerkin method, and the natural frequencies and mode shapes are obtained. In order to consider the opening and closing effects of the crack, the stiffness at the crack location is modeled by a bilinear function. The results show that the changes in vibration frequencies for a breathing crack are smaller than ones caused by an open crack. The results have been validated by the experimental and theoretical data reported in the previous studies. There is a good agreement between the results obtained through the proposed method and those obtained from the reported experimental data. This agreement shows that present model is more accurate than the previous ones, and it can predict the vibration behavior of beams more precisely.*

**Key Words** Vibration analysis, Cracked beam, Hamilton's principle, Disturbance function, Bilinear stiffness model.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۸/۲۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۹/۹ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۳) عضو هیأت علمی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ملکان، ملکان، ایران.

**مقدمه**

سازه‌های دینامیکی که تحت بارهای متناوب قرار می‌گیرند بخش مهمی را در ماشین آلات صنعتی تشکیل می‌دهند. یکی از مسایل مورد توجه محققان پدیده‌ی خستگی و رشد ترک ناشی از آن است. با توجه به این‌که ترک و رشد آن سبب خرابی و شکست در ماشین آلات صنعتی می‌شود، مطالعه و بررسی روش‌هایی که بتواند به‌سادگی و با دقت مناسبی پارامترهای ترک را پیش‌بینی کند، ضروری می‌باشد. مطالعات نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشی یکی از پرکاربردترین روش‌ها در این زمینه است.

وجود ترک در سازه‌ها باعث تغییر در رفتار دینامیکی از جمله فرکانس‌های طبیعی، شکل مودهای ارتعاشی و ... می‌شود. محققان متعددی با استفاده از مدل‌های مختلف به بررسی اثر ترک بر رفتار ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار پرداخته‌اند [1-10]. Doebling و همکاران [2] با ارائه‌ی یک دید کلی از اقدامات و روش‌های انجام شده در زمینه‌ی شناسایی ترک، بر اهمیت استفاده از مدل ریاضی برای تحلیل ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار تأکید کرده‌اند. Chondros و Dimarogonas [11] با استفاده از تئوری پیوسته و اصلاح میدان تغییر مکان، تنش و کرنش در مجاورت ترک، معادله‌ی دیفرانسیل خطی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به‌دست آوردند. آن‌ها با استفاده از تئوری مکانیک شکست، تابع اغتشاش ترک بر میدان تنش را برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج نمودند و به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز پرداختند. Christides و Barr [12,13] تئوری پیوسته ترک را برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها اثر ترک را با کمک نتایج تجربی به‌صورت یک تابع اغتشاش نمایی که در میدان تنش عمودی اعمال می‌شود مدل نمودند. Shen و Pierre [14] مدل ارائه شده توسط Christides و Barr را مورد بازنگری قرار دادند و با در نظر گرفتن ترک لبه باز، معادلات دیفرانسیل جدیدی را برای مطالعه‌ی رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار ارائه کردند.

در مدل ترک باز، فرض می‌شود که ترک همواره به‌صورت باز باقی می‌ماند و می‌توان از مدل فنر خطی با سفتی ثابت استفاده نمود. اما در مورد ترک خستگی، از آن‌جایی که ترک در طول ارتعاش همواره باز و بسته می‌شود، بنابراین استفاده از مدل ترک لبه‌باز با خطای بیش‌تری همراه خواهد بود. Gudmundson [15] با بررسی این پدیده به این نتیجه رسید که استفاده از مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهم‌ترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کم‌تر از مقدار واقعی آن است. Friswell و Penny [16] رفتار غیر خطی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها دارای ترک باز و بسته شونده را در مود اول ارتعاشی توسط نوسانگر یک درجه آزادی با سفتی دوخطی مدل‌سازی کرده‌اند. Gomes و Almeida [17] ارتعاش تیر ترک‌دار را با در نظر گرفتن اثر نیروی برشی و اینرسی دورانی بررسی کردند و نشان دادند که این اثر در تیرهای ترک‌دار بلند قابل چشم‌پوشی است.

رضائی و عرب‌ملکی [۱۸] مدل پیوسته‌ای برای ترک در نظر گرفتند و با استفاده از تابع اغتشاش که در میدان‌های تغییر مکان، تنش و کرنش اعمال می‌شود به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از اصل Hu-Washizu معادله‌ی حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر را استخراج نمودند و برای تعیین باز یا بسته بودن ترک از انحنای منحنی خیز تیر در محل ترک استفاده نمودند. این نوع مدل بر خلاف مدل ترک لبه‌باز، باعث غیرخطی شدن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی می‌شود. در مدل آن‌ها پارامترهای مجهول تابع اغتشاش به‌صورت تجربی و نیز با استفاده از نتایج

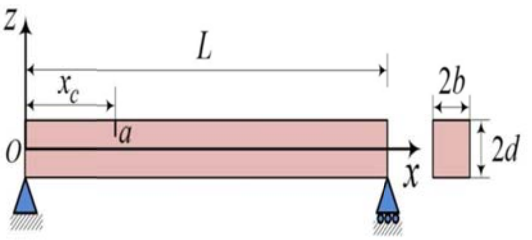
المان محدود به‌دست آمده است. این امر باعث محدودیت کاربرد روش ارائه شده برای انواع شرایط مرزی و تیر با سطح مقطع‌های متفاوت می‌شود.

هدف اصلی از پژوهش حاضر، ارائه‌ی مدل پیوسته‌ی جدیدی برای بررسی رفتار دینامیکی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار در غیاب میرایی است، طوری که بتواند با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به‌ازای بازه‌ی گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی نماید. بدین منظور، ترک با استفاده از فرضیات واقع‌بینانه و روش کاملاً تحلیلی، به‌صورت تابع اغتشاش مدل شده است. بر خلاف روش ارائه شده توسط Christides و Barr [12]، Shen و Pierre [14] و رضائی و عرب‌ملکی [۱۸] که برای به‌دست آوردن تابع اغتشاش ترک نیاز به روش تکمیلی دیگری از جمله استفاده از نتایج تجربی و نتایج المان محدود دارد، در روش ارائه شده در مقاله‌ی حاضر، تابع اغتشاش صرفاً با استفاده از روابط مکانیک شکست، استخراج می‌شود. این تابع در میدان تنش اثر می‌کند به‌طوری که در محل ترک دارای مقدار بیشینه است و با دور شدن از آن به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. معادلات ارتعاشی حاکم بر تیر ترک‌دار که با اعمال تابع اغتشاش پیشنهادی به‌دست می‌آیند، پیچیدگی کم‌تری دارند و قابل تعمیم به انواع شرایط مرزی می‌باشند.

پس از مدل کردن ترک توسط تابع اغتشاش، معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار توسط اصل همیلتون برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج شده است. به‌منظور بررسی اثر پارامترهای ترک (موقعیت و عمق ترک) بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، معادله‌ی حرکت به‌دست آمده با استفاده از روش گالرکین مورد تحلیل قرار گرفته و با حل مسأله مقدار ویژه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار به‌دست آمده است. سپس به‌منظور بررسی اثر باز و بسته شوندگی ترک، مدل ارائه شده‌ی ترک باز، با استفاده از سفتی دوخطی به‌صورت مدل ترک خستگی ارائه گردیده است. در نهایت صحت نتایج به‌دست آمده، با استفاده از نتایج تجربی موجود در مراجع به اثبات رسیده است. این نتایج نشان می‌دهد که مدل ارائه شده رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را با دقت مناسبی پیش‌بینی می‌کند.

## تابع اغتشاش ترک

تیر اویلر- برنولی ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید.




شکل ۱ هندسه‌ی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار

در این شکل، a عمق ترک، b نصف پهنای تیر، d نصف ضخامت تیر، L طول تیر و $x_c$ موقعیت ترک را نمایش می‌دهد. هم‌چنین x در راستای محور طولی و z در راستای محور عرضی می‌باشد.

توزیع تنش و کرنش توسط Tada و همکاران [19] و Paris و sih [20] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که توزیع تنش در یک تیر ترک‌دار به‌گونه‌ای است که در محل ترک مقدار تنش بیشینه می‌شود و با دور شدن از آن مقدار تنش با نسبت ریشه دوم فاصله از ترک، کاهش می‌یابد. این اثر ترک و رفتار تنش به‌صورت دقیق‌تر توسط تابع اغتشاش به‌صورت زیر مدل شده است [14] که در ادامه در میدان کرنش اعمال می‌شود:

$$\varphi(x,z) = \left[ z - m\left(z + \frac{a}{2}\right)u(d - a - z) \right] e^{\frac{-\alpha}{d}|x - x_c|} \qquad (۱)$$

در معادله‌ی اخیر، m و α ضرایب تعیین‌کننده‌ی شکل تابع اغتشاش هستند. α متغیر بی‌بعد مثبتی است که نرخ کاهش تنش با دور شدن از محل ترک را نشان می‌دهد. هم‌چنین $u(d-a-z)$ تابع پله واحد است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(d-a-z)=\begin{cases}1, & z<d-a\\ 0, & z\geq d-a\end{cases} \qquad (۲)$$

وجود ترک باعث تغییر در خیز و شیب تیر ترک‌دار می‌شود. اگر تیر تحت گشتاور خمشی M قرار گیرد، در این صورت شیب اضافی ناشی از وجود ترک طبق قضیه‌ی کاستیگلیانو به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [21]:

$$\theta^*=\frac{\partial U_C}{\partial M} \qquad (۳)$$

که در آن $U_C$ انرژی کرنشی ناشی از ترک می‌باشد. این انرژی با استفاده از معادله زیر به‌دست می‌آید [21]:

$$U_C=\int_{crack} J(\xi)d\xi \qquad (۳)$$

در این رابطه ξ عمق نسبی ترک می‌باشد. هم‌چنین $J(\xi)$ نرخ انرژی کرنشی آزاد شده است و برای بارگذاری در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$J(\xi)=\frac{1}{E^*}\left[\left(\sum_{i=1}^{6}K_{Ii}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{6}K_{IIi}\right)^2\right]+\frac{1}{2G}\left(\sum_{i=1}^{6}K_{IIIi}\right)^2 \qquad (۵)$$

در معادله‌ی اخیر، G مدول برشی تیر است و $E^*$ در حالت تنش صفحه‌ای برابر مدول یانگ، E، می‌باشد ولی برای حالت کرنش صفحه‌ای، $E^*=E/1-\nu^2$ خواهد بود که در آن ν نسبت پواسون می‌باشد. به‌علاوه $K_I$، $K_{II}$ و $K_{III}$ ضرایب شدت تنش هستند. این ضرایب برای تیر ترک‌دار تحت خمش خالص به‌صورت زیر می‌باشد [21]:

$$K_I=\frac{Md}{I}\sqrt{\pi a}\beta_I(\xi),\quad K_{II}=K_{III}=0 \qquad (٦)$$

که در آن $\beta_I(\xi)$ تابعی از عمق نسبی ترک است و به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\beta_I(\xi)=1.12-1.4\xi+7.33\xi^2-13.1\xi^3+14\xi^4 \qquad (۷)$$

این رابطه برای محدوده‌ی $\xi<0.6$ صادق است. با قرار دادن روابط (۷–۵) در معادله‌ی (٤) و استفاده از رابطه‌ی (۳) و انجام عملیات ریاضی و انتگرال‌گیری، شیب اضافی ناشی از وجود ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta^*=\frac{Ma\left(1-\nu^2\right)}{EI}F(\xi) \qquad (۸)$$

که در آن عبارت بی‌بعد $F(\xi)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}F(\xi)&=369.45\xi^9-768.22\xi^8+887.93\xi^7\\&-622.69\xi^6+382.54\xi^5-187.99\xi^4\\&+86.61\xi^3-19.7\xi^2+11.82\xi\end{aligned} \qquad (۹)$$

با توجه به رابطه‌ی (۸) تنها با داشتن مشخصات مکانیکی و هندسی تیر و ترک، می‌توان شیب اضافی ناشی از ترک را بر حسب گشتاور خمشی به‌دست آورد. با توجه به این که برای فنر پیچشی رابطه‌ی بین تغییر مکان و ضریب سفتی به‌صورت $M=K_t\theta$ می‌باشد بنابراین ضریب سفتی فنر در محل ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K_t=\frac{EI}{a\left(1-\nu^2\right)F(\xi)} \qquad (۱۰)$$

با متغیر در نظر گرفتن ممان اینرسی سطح مقطع تیر، $I(x)$، رابطه‌ی بین انحنای تیر و گشتاور خمشی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d^2w_c}{dx^2}=\frac{M}{EI(x)} \quad (۱۱)$$

در رابطه‌ی اخیر $w_c(x)$ خیز تیر ترک‌دار در راستای محور z می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۱۱) خواهیم داشت:

$$\theta_c(x)=\frac{M}{E}\int\frac{1}{I(x)}dx+C \quad (۱۲)$$

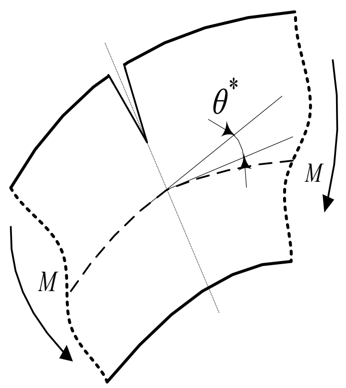
که در آن C ثابتی است که با استفاده از شرایط مرزی به‌دست می‌آید. برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها خواهیم داشت:

$$\theta_c(x)=\frac{M}{E}B(x)-\frac{M}{EL}\int_0^L B(x)dx \quad (۱۳)$$

که در آن:

$$B(x)=\int\frac{1}{I(x)}dx \quad (۱٤)$$

$\theta_c(x)$ تابع شیب منحنی تیر ترک‌دار می‌باشد که در محل ترک ناپیوسته است. این ناپیوستگی ناشی از اختلاف شیب منحنی تیر در دو طرف ترک می‌باشد که در شکل (۲) نشان داده شده است.




شکل ۲ اختلاف شیب منحنی تیر ترک‌دار در محل ترک

بنابراین مقدار شیب اضافی ناشی از وجود ترک را می‌توان از اختلاف شیب منحنی تیر در دو طرف محل ترک به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left|\theta_c(x_c^+)-\theta_c(x_c^-)\right|=\theta^* \quad (۱۵)$$

از طرفی، بر اساس واقعیت در صورتی که عمق ترک به صفر میل کند، باید تابع اغتشاش نیز صفر شود؛ بنابراین:

$$\lim_{a\to 0}\varphi(x,z)=0 \quad (١٦)$$

با استفاده از حل دو معادله‌ی (١٦ و ۱۵) می‌توان مقادیر m و α را برای ترک با عمق دلخواه a به‌دست آورد، در این صورت تابع اغتشاش به‌صورت کامل تعریف می‌شود.

## استخراج معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار

Shen و Pierre مقدار تنش محوری تیر ترک‌دار را به‌صورت زیر بیان کرده‌اند [14]:

$$\sigma_x(x,z,t)=\left[-z+\varphi(x,z)\right]T(x,t) \quad (۱۷)$$

در این رابطه $T(x,t)$ تابع مجهول تنش می‌باشد. بر این اساس و با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی برای تیر ترک‌دار، کرنش محوری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_x=\left[-z+\varphi(x,z)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۱۸)$$

که در آن، $w(x,t)$ تغییر مکان تیر در راستای محور z می‌باشد. با اعمال تابع اغتشاش ترک بر میدان تنش و کرنش و استفاده از اصل همیلتون می‌توان معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار را به‌دست آورد. بدین منظور لازم است ابتدا توابع انرژی پتانسیل و

انرژی جنبشی به‌دست آید. انرژی جنبشی تیر تحت ارتعاشات عرضی با در نظر گرفتن حرکت تیر صرفاً در راستای محور z به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T = \iiint_V \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dV \qquad (۱۹)$$

در رابطه‌ی اخیر، ρ و dV به‌ترتیب معرف جرم واحد حجم تیر و المان حجمی تیر می‌باشد. انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$U = \iiint_V \frac{1}{2}E\left(\varepsilon_x\right)^2 dV \qquad (۲۰)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۱۸)، داریم:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2}E\left[-z+\varphi(x,z)\right]^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dA dx \qquad (۲۱)$$

در این رابطه A سطح مقطع تیر می‌باشد و طبق اصل همیلتون می‌توان نوشت [22]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (T-U)dt = 0 \qquad (۲۲)$$

با جای‌گذاری روابط (۲۱ و ۱۹) در اصل همیلتون داریم:

$$\begin{aligned}&\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_A E\left[-z+\varphi(x,z)\right]^2 dA\right)\right]\delta w dx \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_A E\left[-z+\varphi(x,z)\right]^2 dA\right)\delta w\Big|_0^L \\ &+\left(\int_A E\left[-z+\varphi(x,z)\right]^2 dA\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^L = 0\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

ممان اینرسی سطح برای تیر ترک‌دار را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I(x) = \int_A \left[-z+\varphi(x,z)\right]^2 dA \qquad (۲٤)$$

با استفاده از روابط (۲٤ و ۲۳) معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار به‌همراه شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad (۲۵)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\Big|_0^L = 0 \qquad (۲٦)$$

$$EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^L = 0 \qquad (۲۷)$$

رابطه‌ی (۲۵) معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار می‌باشد. در غیاب ترک، $I(x)$ بر اساس رابطه‌ی (۲٤) برابر با ممان اینرسی سطح برای تیر سالم می‌باشد و معادله‌ی حرکت (۲۵) به‌صورت فرم استاندارد معادله‌ی تیر اویلر- برنولی بیان می‌شود. با استفاده از روابط (۲۷ و ۲٦) شرایط مرزی برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow I(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\ w = 0 \\ x = L \rightarrow I(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\ w = 0 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

## مسأله‌ی مقدار ویژه و استخراج فرکانس‌های طبیعی

معادله‌ی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار مطابق رابطه‌ی (۲۵) می‌باشد. این معادله دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی است ولی به‌صورت صریح قابل حل نیست. برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی از روش گالرکین استفاده خواهیم کرد. با استفاده از روش جداسازی

متغیرها می‌توان پاسخ این معادله را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$w(x,t) = W(x)T(t) \quad (۲۹)$$

پاسخ زمانی تیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$T(t) = C_1 \sin(\omega_n t + \Phi_0) \quad (۳۰)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۹) در معادله‌ی حرکت تیر و استفاده از پاسخ زمانی (۳۰)، داریم:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right) = \lambda_n \rho A W(x) \quad (۳۱)$$

که در آن $\sqrt{\lambda_n} = \omega_n$ فرکانس‌های طبیعی می‌باشند. برای استفاده از روش گالرکین، $W(x)$ به‌صورت ترکیبی از توابع شکل مود در نظر گرفته می‌شود:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n(x) \quad (۳۲)$$

تابع شکل مود مناسب برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده به‌صورت زیر است:

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (۳۳)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۲) در معادله‌ی (۳۱) و ضرب $\psi_m(x)$ در دو طرف معادله و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر، مسأله‌ی مقدار ویژه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\det(k - \lambda_n m) = 0 \quad (۳٤)$$

که در آن $m$ و $k$ به‌ترتیب ماتریس جرم و سفتی هستند و مؤلفه‌های آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (۳۵)$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2\psi_j(x)}{dx^2} dx \quad (۳٦)$$

ماتریس سفتی به‌دست آمده یک ماتریس متقارن است. در نتیجه، مسأله‌ی مقدار ویژه در رابطه‌ی (۳۲) دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی خواهد بود که این ویژگی یکی از مزیت‌های تئوری ارائه شده است و در مدل‌های مشابه دیده نمی‌شود.

## ارائه مدل دو خطی

به‌منظور اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک، مدل ارائه‌شده در قسمت قبل توسط پارامتر کنترلی $\gamma$ به‌صورت مدل سفتی دو خطی ارائه گردیده است. این پارامتر به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_c} < 0 \\ 0, & \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_c} > 0 \end{cases} \quad (۳۷)$$

زمانی که ترک باز باشد، $\gamma = 1$ می‌باشد و تابع اغتشاش در میدان‌های جابه‌جایی، تنش و کرنش اثر می‌کند و اگر ترک بسته شود، $\gamma = 0$ است و اثر تابع اغتشاش در معادلات از بین رفته و معادله‌ی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر، به معادله تیر اویلر- برنولی استاندارد تبدیل می‌شود. برای تعیین باز یا بسته بودن ترک از علامت انحنای خیز تیر استفاده شده است. با استفاده از این پارامتر می‌توان خیز عرضی تیر را به‌صورت زیر فرض نمود:

$$w_i(x,t) = \gamma W_i^c(x) T_i(t) + (1-\gamma) W_i^{nc}(x) T_i(t) \quad (۳۸)$$

در رابطه‌ی فوق، $W_i^c$ و $W_i^{nc}$ به‌ترتیب معرف شکل مود ارتعاشی $i$اُم تیر ترک‌دار و سالم و $T_i(t)$

معرف بخش زمانی متناظر می‌باشد. با جای‌گذاری $w_i(x,t)$ از رابطه‌ی (۳۸) در معادله‌ی (۲۵) داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\gamma EI(x)T_i(t)\frac{\partial^2 W_i^c}{\partial x^2}+(1-\gamma)EI(x)T_i(t)\frac{\partial^2 W_i^{nc}}{\partial x^2}\right)+\rho A\left\{\gamma W_i^c(x)\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}+(1-\gamma)W_i^{nc}(x)\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}\right\}=0 \quad (۳۹)$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی (۳۹) در عبارت $w_i(x,t)$ و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر و استفاده از شرایط مرزی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، معادله‌ی حرکت تیر با مدل ترک باز و بسته شونده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m_i\frac{d^2T_i(t)}{dt^2}+k_iT_i(t)=0 \quad (۴۰)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴۰) ارتعاشات تیر ترک‌دار در مود iاُم را می‌توان با ارتعاشات نوسان‌گر یک درجه آزادی معادل گرفت که سفتی و جرم معادل آن با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$m_i=\int_0^L \rho A W_i(x)W_i(x)dx \qquad k_i=\begin{cases}k_i^c, & \gamma=1\\ k_i^{nc}, & \gamma=0\end{cases} \quad (۴۱)$$

در روابط اخیر، $k_i^c$ و $k_i^{nc}$ به‌ترتیب سفتی معادل تیر ترک‌دار در شرایط کاملاً باز و کاملاً بسته ترک است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$k_i^c=\int_0^L EI(x)\frac{d^2W_i^c}{dx^2}\frac{d^2W_i^c}{dx^2}dx \qquad k_i^{nc}=\int_0^L EI(x)\frac{d^2W_i^{nc}}{dx^2}\frac{d^2W_i^{nc}}{dx^2}dx \quad (۴۲)$$

بنابراین با در نظر گرفتن هر مود ارتعاشی، معادله‌ی (۴۰) را می‌توان به فرم یک معادله‌ی دو خطی به این صورت نوشت:

$$\frac{d^2T_i(t)}{dt^2}+\left(\omega_i^c\right)^2T_i(t)=0,\quad \gamma=1 \qquad \frac{d^2T_i(t)}{dt^2}+\left(\omega_i^{nc}\right)^2T_i(t)=0,\quad \gamma=0 \quad (۴۳)$$

که در آن فرکانس‌های طبیعی $\omega_i^c$ و $\omega_i^{nc}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_i^c=\sqrt{\frac{k_i^c}{m_i}},\qquad \omega_i^{nc}=\sqrt{\frac{k_i^{nc}}{m_i}} \quad (۴۴)$$

Douka و همکاران [23] نشان دادند که برای ارتعاشات آزاد و نامیرای تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده، فرکانس‌های طبیعی را می‌توان با استفاده از مدل دو خطی به‌صورت زیر به‌دست آورد [24]:

$$\omega_b=\frac{2\omega_i^c\omega_i^{nc}}{\omega_i^c+\omega_i^{nc}} \quad (۴۵)$$

نکته‌ای که باید ذکر شود این است که در پژوهش‌های پیشین، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار در دو حالت ترک کاملاً باز و ترک کاملاً بسته از تست‌های تجربی به‌دست می‌آید در حالی‌که در تحقیق حاضر، نیاز به انجام تست‌های تجربی نیست و یک روش تحلیلی با در نظر گرفتن یک تابع اغتشاش برای این منظور ارائه شده است. مقادیر به‌دست آمده از رابطه‌ی (۴۵) فرکانس‌های طبیعی هستند که در آن اثر باز و بسته شدن ترک لحاظ شده است. در صورتی که مقادیر ویژه‌ی به‌دست آمده از رابطه‌ی (۳۴) بر اساس مدل ترک لبه باز می‌باشد.

## نتایج عددی

به‌منظور مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده از مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در ادبیات فن، دو نمونه تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مشخصات این تیرها در جدول‌های زیر آورده شده است.

جدول ۱ ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر آلومینیومی [24].

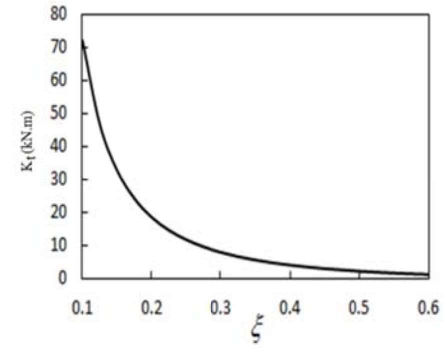
| | |
|---|---|
| مدول یانگ | $E = 7.2\times10^{10}\ \ N/m^2$ |
| جرم واحد حجم | $\rho = 2800\ \ kg/m^3$ |
| نسبت پواسون | $\nu = 0.333$ |
| طول تیر | $L = 235mm$ |
| سطح مقطع | $A = 7\times23\ \ mm^2$ |

جدول ۲ ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر فولادی [25].

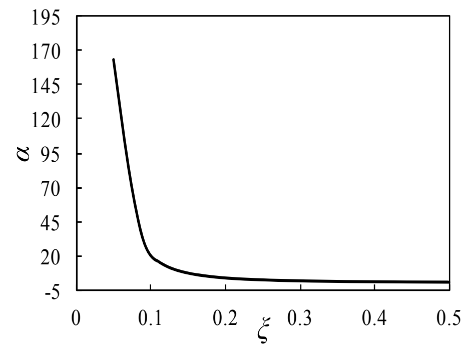
| | |
|---|---|
| مدول یانگ | $E = 2.16\times10^{11}\ \ N/m^2$ |
| جرم واحد حجم | $\rho = 7650\ \ kg/m^3$ |
| نسبت پواسون | $\nu = 0.3$ |
| طول تیر | $L = 400\ \ mm$ |
| سطح مقطع | $A = 10\times10\ \ mm^2$ |

پارامترهای بی‌بعد ترک که در ادامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت عبارتند از: $\xi = a/2d$ که نشان دهنده‌ی عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به ضخامت تیر) و $\eta_c = x_c/L$ نشان دهنده‌ی موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله‌ی ترک از ابتدای تیر به طول تیر) می‌باشد.

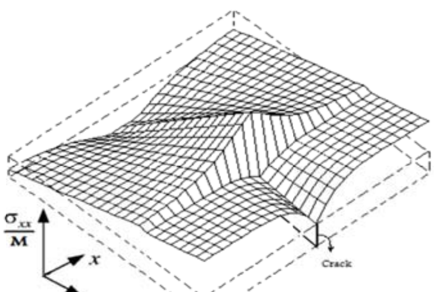
تغییرات ضریب سفتی فنر پیچشی معادل در محل ترک بر حسب عمق نسبی ترک در شکل (۳) نشان داده شده است و مطابق آن، با افزایش عمق ترک سفتی معادل کاهش می‌یابد. هم‌چنین در شکل (٤) تغییرات نرخ کاهش تنش، $\alpha$، بر حسب عمق نسبی ترک نشان داده شده است. مطابق واقعیت هر چه عمق ترک کم باشد، اثر آن در میدان تنش و رفتار ارتعاشی تیر ناچیز خواهد بود و عبارت $e^{-\frac{\alpha}{d}|x-x_c|}$ مقدار کم‌تری خواهد داشت. به عبارت دیگر با افزایش عمق ترک، مقدار $\alpha$ کاهش می‌یابد.




شکل ۳ تغییرات ضریب سفتی فنر پیچشی معادل محل ترک بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر آلومینیومی




شکل ٤ تغییرات $\alpha$، نرخ کاهش تنش، بر حسب عمق نسبی ترک



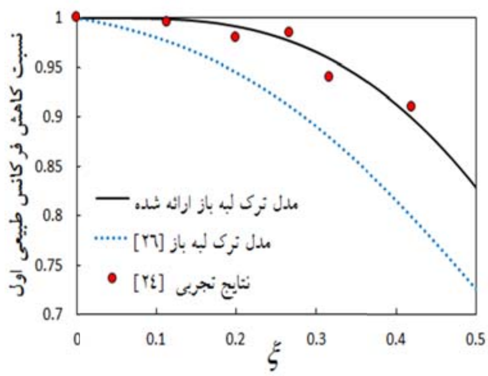

شکل ٥ توزیع تنش در ناحیه‌ی ترک با عمق نسبی $\xi = 0.3$ و $\alpha = 1.49$ به‌ازای گشتاور خمشی واحد

در شکل (۵)، توزیع تنش به‌ازای گشتاور خمشی واحد در همسایگی ترک نشان داده شده است. در این شکل x در راستای محور طولی تیر و z در راستای حرکت عرضی آن می‌باشد. بر اساس این توزیع، مقدار تنش در نوک ترک بیشینه است و با دور شدن از محل ترک، به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

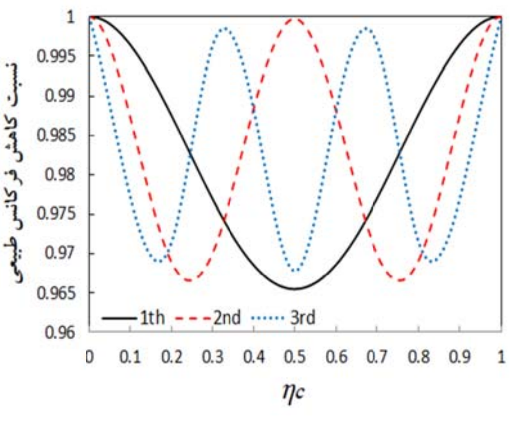
در این مقاله، تابع اغتشاش پیشنهادی به دو حالت از ترک، ۱- تَرکی که در حین ارتعاش تیر همواره باز باقی می‌ماند و ۲- ترکی که در حین ارتعاش تیر باز و بسته می‌شود، اعمال شده است که در متن مقاله از آن‌ها به‌ترتیب با عناوین «مدل ترک لبه باز» و «مدل ترک باز و بسته شونده» یاد شده است. بنابراین مدل ترک لبه باز که با اعمال تابع اغتشاش ارائه شده استخراج شده است با مدل‌های مرسوم خطی ترک باز که در ادبیات فن از آن‌ها نیز تحت عنوان «مدل ترک لبه باز» یاد می‌شود کاملاً متفاوت است. در ادامه قبل از بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، ابتدا صحت مدل ارائه شده را با استفاده از نتایج حاصل از تست‌های تجربی که در مرجع [24] برای تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها ارائه شده است بررسی می‌کنیم.

در شکل (٦) منحنی تغییرات نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای ترک با موقعیت نسبی $\eta_c = 0.5$، با استفاده از تئوری پیشنهادی محاسبه شده است و به‌همراه نتایج مدل ارائه شده در مرجع [26] و نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در مرجع [24] ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که به‌ازای موقعیت مشخص ترک با افزایش عمق ترک، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. بر اساس این مقایسه حداکثر خطا بین نتایج تجربی و مدل ارائه شده ‎2%‎ می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی از دقت بالایی برخوردار است.

در شکل (٧)، اثر موقعیت ترک به‌ازای عمق مشخصی از آن برای تیر آلومینیومی نشان داده شده است. همچنان‌که از این شکل مشخص است اثر ترک با نزدیک شدن ترک به نقطه‌ی گرهی کاهش می‌یابد. از آن‌جا که تنش در نقاط گرهی کم‌ترین مقدار را دارد، قرار گرفتن ترک در نقاط گرهی باعث کم‌ترین افت در نسبت فرکانسی می‌شود. از طرفی، کاهش فرکانس طبیعی در محل‌هایی با بیش‌ترین انحنا و بیش‌ترین میزان تنش در مود ارتعاشی مورد نظر، به مقدار قابل توجهی می‌رسد.




شکل ٦ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر آلومینیومی با تکیه‌گاه ساده در دو انتها و مقایسه آن با نتایج تجربی [24] و مدل ارائه شده در مرجع [26]، به‌ازای موقعیت نسبی ترک $\xi = 0.5$

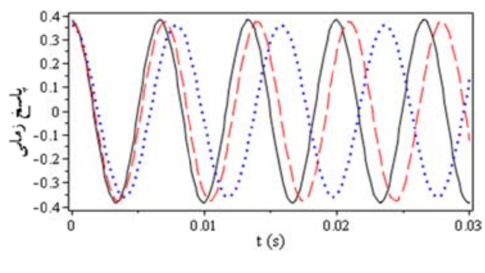



شکل ٧ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول (—)، نسبت کاهش فرکانس طبیعی دوم (---) و نسبت کاهش فرکانس طبیعی سوم (........) بر حسب موقعیت نسبی ترک به‌ازای عمق نسبی $\xi = 0.3$ برای تیر ترک‌دار آلومینیومی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

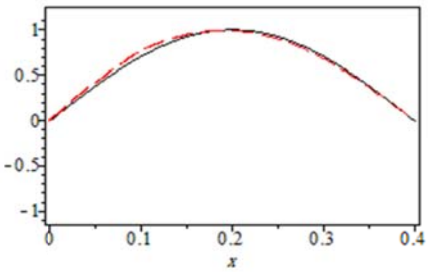
در شکل (۸) پاسخ نامیرای ارتعاشات آزاد تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به‌ازای ترک در موقعیت نسبی $\eta_c = 0.5$ نشان داده شده است. این پاسخ در شکل مود ارتعاشی اول برای دو عمق متفاوت ترک با پاسخ تیر سالم مقایسه شده است. با توجه به این‌که تیر ترک‌دار فرکانس کم‌تری نسبت به تیر سالم دارد پاسخ تیر ترک‌دار دوره‌ی تناوب بیش‌تری خواهد داشت و با افزایش عمق ترک دوره‌ی تناوب پاسخ بیش‌تر خواهد شد.

شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار و شکل مودهای ارتعاشی تیر سالم، در شکل (۹) نشان داده شده است. بر اساس این نمودارها شیب اضافی ناشی از ترک، سبب ایجاد شکستگی در نمودار شکل مود ارتعاشی تیر ترک‌دار می‌شود.

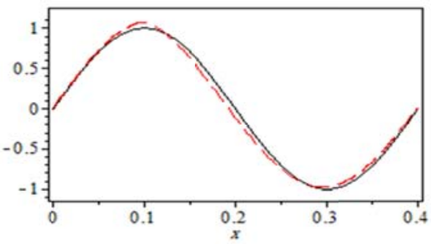
یکی از مشخصه‌های اصلی رفتار غیرخطی پاسخ ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار با مدل ترک باز و بسته شونده، تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد. مطالعات نشان می‌دهد که وجود ترک باعث کاهش در فرکانس‌های طبیعی سازه‌های ترک‌دار می‌شود و با توجه به این که سقتی معادل متناظر با مدل ترک باز کم‌تر از سفتی معادل مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد بنابراین اثر ترک باز بر کاهش فرکانس‌های طبیعی بیشتر از مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد. در شکل (۱۰) منحنی تغییرات نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول برحسب موقعیت نسبی ترک با مدل ترک باز و نیز مدل ترک باز و بسته شونده ارائه شده است.



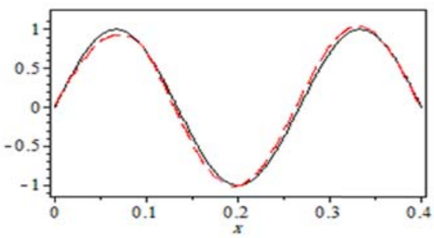

شکل ۸ پاسخ آزاد ارتعاشات نامیرای تیر فولادی در مود اول ارتعاشی برای تیر سالم (—)، تیر ترکدار با موقعیت ترک در $\eta_c = 0.5$ و عمق نسبی ترک $\xi = 0.35$ (---) و تیر ترکدار با موقعیت ترک در $\eta_c = 0.5$ و عمق نسبی ترک $\xi = 0.5$ (......)




الف- شکل مود اول ارتعاشی

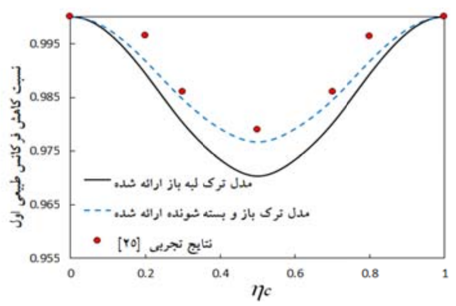



ب- شکل مود دوم ارتعاشی




ج- شکل مود سوم ارتعاشی

شکل ۹ شکل مودهای اول، دوم و سوم ارتعاشی تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برای تیر سالم (———) و تیر ترک‌دار (– – –) به‌ازای ترک با عمق نسبی $\xi = 0.4$ و موقعیت نسبی $\eta_c = 0.25$




شکل ۱۰ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول در برابر موقعیت نسبی ترک برای تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و ترک با عمق نسبی $\xi = 0.3$

سفتی معادل تیر با ترک باز کم‌تر از سفتی تیر سالم می‌باشد بنابراین سفتی معادل تیر با ترک باز و بسته شونده بیش‌تر از سفتی تیر با ترک باز خواهد بود؛ چرا که در مدل ترک باز و بسته شونده، در بخشی از زمان ارتعاش، سفتی معادل تیر با سفتی تیر سالم یکسان می‌شود. این مسأله باعث افزایش فرکانس طبیعی حاصل از مدل ترک باز و بسته شونده می‌شود. این واقعیت از شکل (۱۰) قابل استنتاج است. همچنین مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از مدل پیشنهادی در پژوهش حاضر برای ترک باز و بسته شونده تطابق خوبی با نتایج تست‌های تجربی ارائه شده در مرجع [25] دارد.

## نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر رفتار ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار با مدل پیوسته مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور ناحیه‌ی ترک با استفاده از اصول مکانیک شکست به‌صورت تابع اغتشاش ترک مدل‌سازی شد. یکی از مزیت‌های عمده‌ی این مدل نسبت به مدل‌های مشابه پیشین، عدم نیاز به استفاده از نتایج تجربی یا نتایج حاصل از روش المان محدود برای محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول به‌کار رفته در تابع اغتشاش ترک می‌باشد.

نتایج نشان می‌دهد که اثر ترک با نزدیک بودن موقعیت ترک به نقاط گرهی کاهش می‌یابد و به‌ازای ترک واقع در موقعیت‌های متناظر با بیش‌ترین انحنا، شدت کاهش فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. به‌علاوه، کاهش نسبت فرکانسی در مدل باز و بسته شونده ترک کم‌تر از کاهش نسبت فرکانسی در مدل ترک باز می‌باشد. در نهایت نتایج حاصل از اعمال مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در ادبیات فن مقایسه شد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده ضمن رفع پیچیدگی‌های مدل‌های اخیر، نسبت به مدل‌های مشابه پیشین بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را با دقت بیش‌تری به‌ازای پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌نماید.

## مراجع


1. Dimarogonas, A.D., "Vibration of cracked structures: a state of the art review", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, pp. 831-857, (1996).
2. Doebling, S.W., Farrar, C.R. and Prime, M.B., "A summary review of vibration-based damage identification methods", The Shock and Vibration Digest. Vol. 30, pp. 91-105, (1998).
3. Ming-Hung Hsu, "Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 194, pp. 1–17, (2005).
4. Wauer, J., "On the dynamics of cracked rotors: a literature survey", Applied Mechanics Reviews, Vol. 43, pp. 13-17, (1990).
5. Wauer, J., "Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts", International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, pp. 901-914, (1990).
6. Hai-Ping Lin, "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack", Engineering Structures, Vol. 26, pp. 427-436, (2004).
7. Sorrenito, S., Marchesiello, S. and Piombo, B.A.D., "A new analytical technique for vibration

analysis of non-proportionally damped beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, pp. 765-782, (2003).

8. Carneiro, S.H.S. and Inman, D.J., "Comments on the free vibration of beams with a single-edge crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 244, pp. 729-737, (2001).
9. Zheng, T. and Ji, T., "An approximate method for determining the static deflection and natural frequency of a cracked beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, pp. 2654-2670, (2012).
10. Chondros, T.G. and Dimarogonas, A.D., "Identification of cracks in welded joints of complex structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 69, pp. 531-538, (1980).
11. Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., "A consistent bar vibration theory", Journal of Sound and Vibration, Vol. 200, pp. 303-313, (1997).
12. Christides, S. and Barr, A.D.S., "One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 26, pp. 639-648, (1984).
13. Christides, S. and Barr, A.D.S., "Torsional vibration of cracked beams of noncircular cross-section", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 28, pp. 473-490, (1986).
14. Shen, M.H.H. and Pierre, C., "Free vibrations of beams with a single-edge crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 170, pp. 237-259, (1994).
15. Gudmundson, P., "The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 31, pp. 329-345, (1983).
16. Friswell, M.I. and Penny, J.E.T., "A simple nonlinear model of a cracked beam", Proceeding of 10th International Modal Analysis Conference, SEM society for Experimental Mechanics INC, pp. 516-521, (1992).
17. Gomes, H.M. and Almeida, F.J.F., "An analytical dynamic model for single-cracked beams including bending, axial stiffness, rotational inertia, shear deformation and coupling effects", Applied Mathematical Modeling, Vol. 38, pp. 938-948, (2014).

۱۸. رضائی، موسی و عرب‌ملکی، وحید، «ارائه‌ی مدل غیرخطی جدید برای بررسی رفتار ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار با ترک خستگی»، نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال بیست و دوم، شماره دو، (۱۳۹۰).

19. Tada, H., Paris, P.C. and Irvin, G.R., "The stress analysis of cracks handbook", Hellertown, Pennsylvania: Del Research Crop, (1985).
20. Paris, P.C. and Sih, G.C., "Stress analysis of cracks", Fracture toughness testing, ASME STP381, pp. 30-82, (1965).
21. Gdoutos, E.E., "Fracture mechanics: an introduction", Vol. 123, Springer, (2005).
22. Rao, S.S., "Vibration of continuous systems", John Wiley & Sons, University of Miami, (1976).
23. Douka, E. and Hadjileontiadis, L.J., "Time-frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack", NDT&E International, Vol. 38, pp. 3-10, (2005).
24. Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., "Vibration of a beam with a breathing crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 239, pp. 57-67, (2001).
25. Han-Ik Yoon, In-Soo Son and Sung-Jin Ahn, "Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 21, pp. 476-485, (2007).

26. Rezaee, M. and Hassannejad, R., "Free vibration analysis of simply supported beam with breathing crack using perturbation method", Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 23, No. 5, (2010).